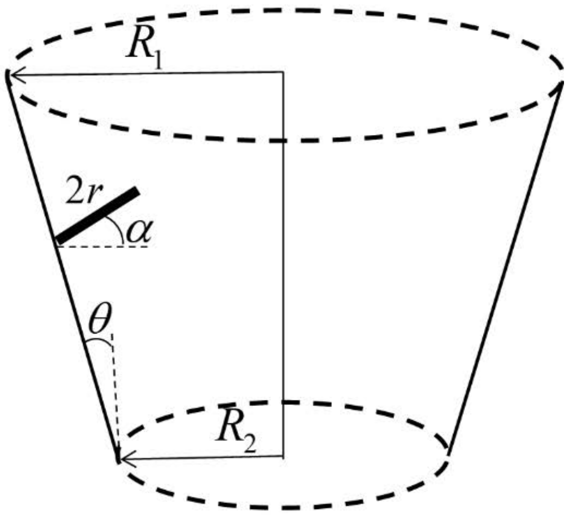
ამოცანა 1

მონეტის გორვა კონუსურ ზედაპირზე (10 ქულა)

საზღვარგარეთის ბევრ გასართობ ცენტრში დგას დიდი ძაბრის მსგავსი რამ, რაშიც აგორებენ ხოლმე მონეტებს. მონეტა იწყებს ჯერ ძაბრის დასაწყისში გორვას, შემდეგ თავისით ინაცვლებს სულ ქვემოთ და ქვემოთ ძაბრის ძირისკენ, ამავე დროს მისი სიჩქარე სულ უფრო და უფრო იზრდება, სანამ არ მიაღწევს ძაბრის უკიდურეს ქვემოთა თითქმის ვერტიკალურ ნაწილს და შემდეგ ვარდება ყუთში. რა თქმა უნდა მონეტა რჩება დაწესებულებას და ეს ითვლება მსოფლიოში ფულის მოგროვების ერთ-ერთ ყველაზე წარმატებულ სქემად. ბავშვები (და არა მხოლოდ ბავშვები) ძალიან ერთობიან იმის ყურებით, თუ როგორ გორაობენ მონეტები ამ დიდ ძაბრისებულ ზედაპირზე ისე, რომ არცერთი არ კარგავს წონასწორობას გორვის დროს. ქვემოთ არის ამ გასართობის ფოტო და აგრეთვე გამარტივებული სქემატური ვერტიკალური ჭრილი.

a)



b)

ნახატი 1: a) გასართობი აპარატი b) აპარატის თეორიული მოდელი

ვთქვათ გვაქვს გადაჭრილ კონუსური ზედაპირი, რომლის ზემოთა რადიუსი არის R_1 -ის ტოლი, ხოლო ქვემოთა R_2 . მონეტის რადიუსია r , ამავე დროს სიმარტივისთვის აიღეთ, რომ $r << R_1$ და $r << R_2$, კონუსის დახრის კუთხეა θ . მონეტა თავიდან დაგორავს ჰორიზონტალურად მიმართული v_0 საწყისი სიჩქარით, კონუსის ზედა კიდის R_1 რადიუსიან ტრაექტორიაზე. ჰაერის წინააღმდეგობის გამო მონეტა ინაცვლებს ქვედა ტრაექტორიებზე. სრიალის და გორვის ხახუნის ძალები სხვა ძალებთან შედარებით უგულებელყავით.

A.1	აჩვენეთ რომ მონეტის ჰორიზონტისადმი დახრის α კუთხე, მოძრაობის R რადიუსი და მონეტის კონუსის ცენტრის მიმართ ბრუნვის Ω კუთხურ სიჩქარე აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობას $\mathrm{tg}\alpha = C\frac{g}{\Omega^2 R}$ და იპოვეთ C კოეფიციენტი.	**2.5 pt.**

A.2	აჩვენეთ რომ კონუსისა და მონეტის დახრის კუთხე კავშირდება შემდეგნაირად $\mathrm{tg}\alpha = C\,\mathrm{tg}\theta$.	**0.5 pt.**

A.3	გაიგეთ რა სიჩქარით გამოვარდება მონეტა გარეთ.	**0.5 pt.**

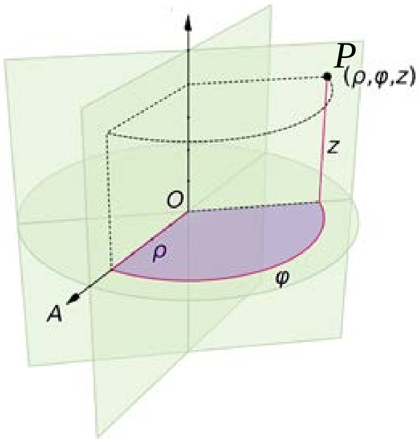
A.4	აჩვენეთ, რომ მონეტის მოძრაობა მდგრადია α კუთხის მცირე ცვლილების შემთხვევაში.	**2 pt.**

ამის შემდეგ ჩვენ გვინდა დავადგინოთ მონეტის მოძრაობის ტრაექტორია, რისთვისაც გამოგადგებათ ცილინდრული კოორდინატები. ცილინდრული სისტემის (ρ, φ, z) კოორდინატები შემდეგნაირადაა განმარტებული:

● რადიალური მანძილი - ρ არის ვერტიკალური ღერძიდან P წერტილამდე დაშორება.

● აზიმუტალური კოორდინატი φ არის კუთხე არჩეულ სიბრტყეზე მითითებულ A მიმართულებასა და კოორდინატთა სისტემის ცენტრიდან P წერტილის სიბრტყეზე გეგმილისკენ გავლებულ წრფეს შორის.

● სიმაღლე z არის არჩეული სიბრტყიდან P წერტილამდე მანძილი. (იხ. ნახატი 2)



ნახატი 2: ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა

A.5	ამ კითხვაში მონეტა განიხილეთ როგორც მატერიალური წერტილი და ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ნიუტონის მეორე კანონის დაწერით განსაზღვრეთ მონეტის მოძრაობის ტრაექტორია: მონეტის ვერტიკალური წანაცვლების დამოკიდებულება მის აზიმუტალურ კუთხეზე. ჩათვალეთ, რომ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა მონეტის სიჩქარის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია η) და დაუშვით, რომ სიმცირის გამო ამ ძალას მხოლოდ ჰორიზონტალური მდგენელი გააჩნია.	**4.5 pt.**

ამოცანა 2

პარამეტრული რეზონანსი მაგნიტურ ქანქარაში (10 ქულა)

(ეს ამოცანა რამდენიმე ნაწილისგან შედგება, თუმცა დასამტკიცებელი ფორმულები მოცემული გაქვთ კითხვებში, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხვა ნაწილებზე მუშაობა შეგიძლიათ მაშინაც, თუ ამოცანის წინა ნაწილები ვერ ამოხსენით).

ამ ამოცანაში ჩვენი მიზანია გამოვიკვლიოთ პარამეტრული არამდგრადობა (რეზონანსი) „მაგნიტური ქანქარის“ სისტემაში.

დანადგარის ზოგადი აღწერა

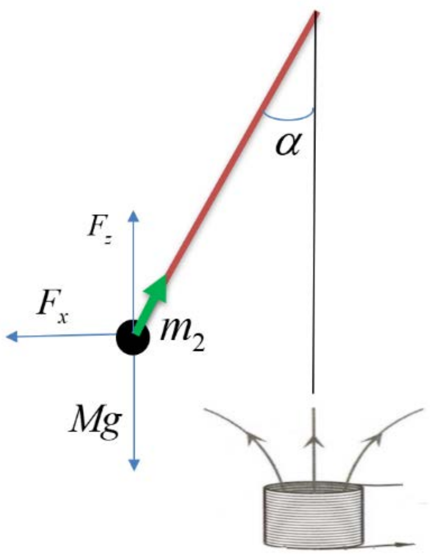
გვაქვს ერთ სიბრტყეში მერხევი მათემატიკური ქანქარა, რომლის ბოლოზეც ხისტადაა მიმაგრებულია მცირე ზომის მაგნიტი, ხოლო ქანქარის წონასწორულ მდებარეობის ქვევით დევს სოლენოიდი, რომელშიც გადის ცვლადი დენი (იხ. ნახაზი).

რხევის პროცესი

სოლენოიდი პერიოდულად განიზიდავს და მიიზიდავს მაგნიტს, რაც ქმნის ქანქარის რხევის ერთ-ერთი პარამეტრის - თავისუფალი ვარდნის აჩქარების - პერიოდული ცვლილების ეფექტს, რაც საშუალებას გვაძლევს დავაკვირდეთ პარამეტრული რეზონანსის მოვლენას, კერძოდ კი რხევის ამპლიტუდის ექსპონენციურ ზრდას, როცა სოლენოიდში დენის სიხშირე, დენის ამპლიტუდა და ქანქარის საკუთარი სიხშირე გარკვეულ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ.

მოცემულობა

ამოცანის მიზანია პარამეტრული რეზონანსის განხორციელების პირობების დადგენა. მოცემულია L სიგრძის მათემატიკური ქანქარა, რომლიც შედგება ხისტ უმასო ღეროსგან, რომლის ბოლოშიც დამაგრებულია M მასისა და $\vec{m}_2$ მაგნიტური მომენტის მქონე წერტილოვანი მაგნიტი, რომლის მაგნიტური მომენტის მიმართულება ემთხვევა ქანქარის ღეროს მიმართულებას (მსხვილი ისარი). ქანქარის წონასწორობის მდგომარეობის ქვემოთ მოთავსებულია r რადიუსის სოლენოიდი, რომელშიც გადის 2ω სიხშირის ცვლადი დენი. მანძილი წონასწორობის მდებარეობაში ქანქარის ბოლოსა და სოლენოიდს შორის L_0-ის ტოლია.

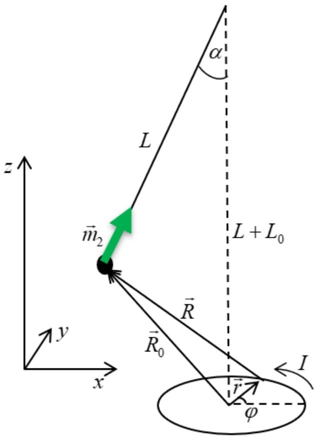


ნახატი 1: მაგნიტური ქანქარა

ნაწილი A. სოლენოიდის მაგნიტური ველი (3 ქულა)

სოლენოიდის მაგივრად განვიხილოთ მცირე ზომის ცირკულარული (წრიული) დენი. A ნაწილში მოგეთხოვებათ ამ დენის მიერ შექმნილი მაგნიტური ველის დათვლა. კითხვებზე საპასუხოდ გამოიყენეთ ნახატ 2-ზე მითითებული პარამეტრები. (გაითვალისწინეთ რომ $\overrightarrow{R_0}$ მოთავსებულია xz სიბრტყეში).

ნახატი 2: მაგნიტური ქანქარის სქემატური ნახაზი



A.1	გამოსახეთ $\vec{R}$ ვექტორის მდგენელები $\overrightarrow{R_0}$ - ისა და $\vec{r}$ ვექტორების მდგენელებით და შემდეგ მათი დახმარებით მიიღეთ $\vec{R}$ - ის სიგრძის (ანუ $\|\vec{R}\|$-ის) გამოსახულება.	0.5 pt.

შემდეგ პუნქტებში სასურველი შედეგის მისაღებად დაგჭირდებათ ტეილორის მწკრივის ცოდნა:

● ტეილორის მწკრივი საშუალებას გვაძლევს ფუნქცია წარმოვადგინოთ უსასრულოდ ბევრი წევრის ჯამის სახით.

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots,$$

სადაც $f^{(n)}(a)$ აღნიშნავს $f(x)$ - ის მე-n წარმოებულს a წერტილში. (a წერტილი ნებისმიერი შეიძლება იყოს)

მაგალითად $\frac{1}{x}$ - ის გაშლა a = 1 წერტილში იქნება:

$$\frac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots.$$

A.2	A.1 პუნქტში მიღებული შედეგით, ტეილორის გაშლის საშუალებით და შედეგებში მხოლოდ პირველი რიგის სიმცირის ხარისხის წევრების შენარჩუნებით ($r << R_0$) აჩვენეთ, რომ $$\frac{1}{R^3}\approx\frac{1}{R_0^3}+\frac{3}{R_0^5}R_{0x}r\cos\varphi$$ სადაც R_{0x} არის $\overrightarrow{R_0}$ ვექტორის x ღერძზე გეგმილი.	0.5 pt.

A.3	მიიღეთ სოლენოიდის წრეწირის ძალიან მცირე რკალის x და y ღერძებზე δl_x და δl_y გეგმილების r და φ პარამეტრებზე დამოკიდებულებები.	0.5 pt.

A.4	დენის დიპოლური მომენტი დავარქვათ შემდეგ სიდიდეს: $m_1 = I \cdot \pi r^2$, სადაც I დენია და r - წრეწირის რადიუსი. გამოიყენეთ ბიო-სავარის კანონი $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\vec{\delta l} \times \vec{R}}{R^3}$ და დაამტკიცეთ, რომ მაგნიტური ველის x და z მდგენელები გამოისახება შემდეგნაირად: $$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{3R_{0z}R_{0x}}{R_0^5} \qquad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \left(\frac{2}{R_0^3} - \frac{3R_{0x}^2}{R_0^5}\right)$$	1.5 pt.

ნაწილი B. მაგნიტზე მოქმედი ძალები (2.5 ქულა)

B.1	აირჩიეთ ათვლის სისტემის სათავედ მაგნიტური ქანქარის დაკიდების წერტილი. $\lvert\vec{R_0}\rvert$ გამოსახეთ L_0, L , z და x სიდიდეებით.	0.25 pt.

B.2	იპოვეთ $\vec{m}_2$ დიპოლური მომენტის x და z კომპონენტები, დიპოლური მომენტის სიდიდე აღნიშნეთ m_{20} -ით.	0.25 pt.

B.3	გამოიყენეთ მიახლოება, რომ გაქვთ პატარა გადახრები წონასწორობიდან და B.1, B.2 პუნქტებში მიღებული შედეგებით და ტეილორის გაშლის გამოყენებით დაამტკიცეთ რომ: $$B_x \approx \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{3x}{L_0^4}; \quad B_z \approx \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \left(\frac{2}{(L+L_0-z)^3} - \frac{6x^2}{L_0^5}\right)$$	1 pt.

B.4	დაატკიცეთ რომ დიპოლ-დიპოლური ურთიერთმედებით ქანქარის ბოლოს მიმაგრებულ m_{20} სიდიდის მუდმივი დიპოლური მომენტის მქონე მაგნიტზე მოქმედი F_x და F_z ძალებს ექნებათ შემდეგი სახე (გაითვალისწინეთ რომ დიპოლის ურთიერთქმედების ენერგია გამოითვლება შემდეგნაირად $U = -\vec{B}\vec{m}$): $$F_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\frac{12x}{L_0^5} - \frac{6x}{LL_0^4}\right) ; \qquad F_z = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\frac{2}{LL_0^3} - \frac{6}{L_0^4}\right)$$	1 pt.

ნაწილი C. ქანქარის მოძრაობა (4.5 ქულა)

C.1	გამოიყენეთ B ნაწილში მიღებული შედეგები და ჩაწერეთ ქანქარის მოძრაობის განტოლება მცირე გადახრის კუთხეებისთვის. გაითვალისწინეთ, რომ სოლენოიდში გადის ცვლადი დენი, ანუ ჩათვალეთ, რომ სოლენოიდის დიპოლური მომენტი დროზე შემდეგნაირადაა დამოკიდებული: $m_1 = m_{10} \cdot \sin(2\omega t)$. უნდა მიიღოთ შემდეგი განტოლება: $$\ddot{\alpha} = -\alpha(\omega_0^2 + h \cdot sin2\omega t)$$ დაწერეთ რა არის ω_0^2 და h მუდმივი სიდიდეების გამოყენებით (g, L, L_0, m_{20}, m_{10}).	2 pt.

C1 -ში მიღებული განტოლების ამონახსნი ეძებეთ შემდეგი ფორმით:

$$\alpha = A(t) \cdot cos\omega t + B(t) \cdot sin\omega t$$

ჩათვალეთ, რომ $A(t)$ და $B(t)$ დროში ნელა ცვლადი ფუნქციებია და მათი მეორე რიგის წარმოებულები დროით გადააგდეთ. არ გაითვალისწინოთ აგრეთვე მესამე რიგის ჰარმონიკების $\cos(3\omega t)$ და $\sin(3\omega t)$-ს პროპორციული წევრები.

ჩვენს სისტემაში პარამეტრული რეზონანსის დროს რხევის ამპლიტუდა უნდა იზრდებოდეს დროში ექსპონენციალურად (ისე, რომ e^{st} -ში s ნამდვილი დადებითი რიცხვი უნდა იყოს). ამიტომ, ვეძებოთ $A(t)$ და $B(t)$ როგორც:

$$A(t) = A_0 e^{st} \text{ და } B(t) = B_0 e^{st}$$

სადაც A_0 და B_0 მუდმივებია.

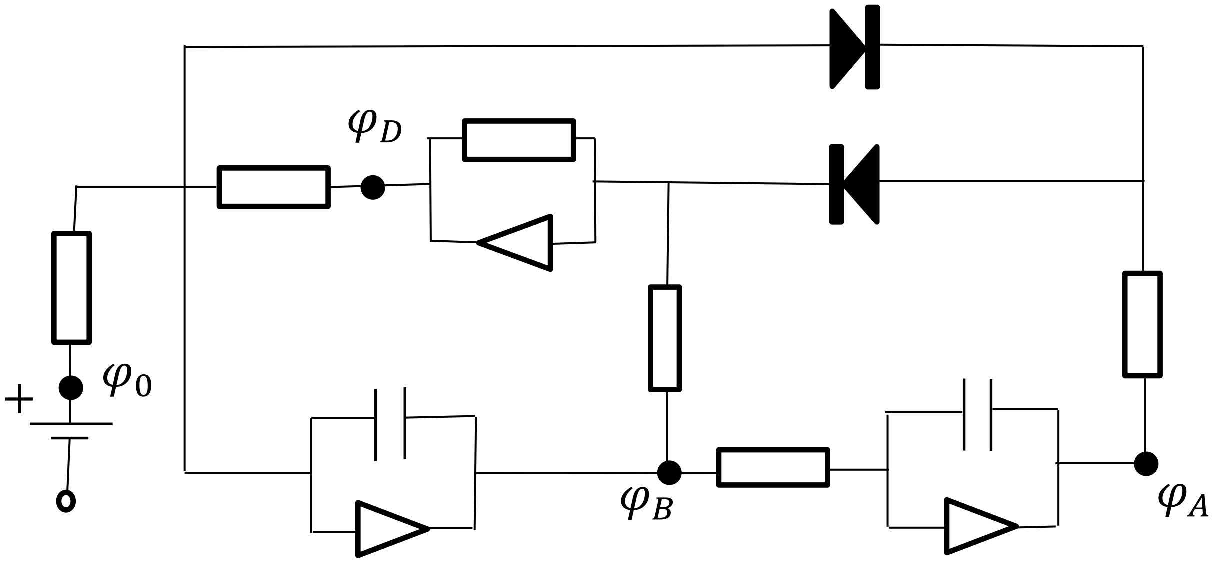
C.2	იპოვეთ რა უტოლობას უნდა აკმაყოფილებდნენ პარამეტრები, რომ ჩვენ სისტემაში განხორციელდეს პარამეტრული რეზონანსი. ჩაწერეთ ეს უტოლობა h, ω და ω_0-ის გამოყენებით.	**2.5 pt.**

ამოცანა 3

არაწრფივი დინამიკა ელექტრულ წრედში (10 ქულა)

შესავალი

ბუნებაში ბევრი მარტივი მექანიკური სისტემა არსებობს, რომელიც რაღაც პარამეტრებისთვის ავლენს არაწრფივ და არატრივიალურ ბუნებას. ელექტრობაშიც შესაძლებელია ასეთი წრედების აწყობა, რომლებიც უკვე ცნობილი არაწრფივი პროცესების ანალოგს წარმოადგენენ. J.C. Sprott-ის მიერ შემუშავებულ და აწყობილ ელექტრულ სქემაში ძაბვის მნიშვნელობა რაღაც უბანზე ქაოსურად იცვლებოდა დროში წრედში არაწრფივი ბმების გამო. მოცემულ ამოცანაში განვიხილავთ J.C. Sprott-ის წრედის ოდნავ გამარტივებულ ვარიანტს მუშაობის იგივე პრინციპით. ამოცანის ქვემოთ მოყვანილ ნახაზში $\varphi_O, \varphi_A, \varphi_B, \varphi_D$ პოტენციალების შესაბამის წერტილებს დავუძახებთ O, A, B და D წერტილებს.



ნახატი 1: წრედი

წრედში გამოყენებული აღნიშვნებია:


R წინაღობის რეზისტორი

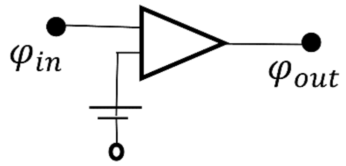

C ტევადობის კონდენსატორი

ოპერაციული გამაძლიერებელი


დიოდი

წრედში ერთ-ერთი მთავარი კომპონენტია ოპერაციული გამაძლიერებელი, რომელიც გამოსახულია შემდეგნაირად . ეს შემოკლებული გამოსახვაა, რეალურად ოპერაციულ გამაძლიერებელს მიეწოდება დამატებითი კვება. მისი მთავარი დანიშნულებაა რაღაც უბანზე პოტენციალის გაზრდა.

იხილეთ ოპერაციული გამაძლიერებლის ნახაზი:



ნახატი 2: ოპერაციული გამაძლიერებელი

წრედში არსებული ოთხივე ოპერაციული გამაძლიერებული მიერთებულია ბატარეასთან ისე, რომ ბატარიის ერთი ბოლო დამიწებულია (ასევე დამიწებულია O წერტილთან არსებული მუდმივი დენის წყარო, რომლის პოტენციალი φ_0-ია). მიწის პოტენციალს ვიღებთ 0-ის ტოლად. ოპერაციული გამაძლიერებელი φ_{in} პოტენციალს აძლიერებს $k = 100\,000$-ჯერ და მიიღება გაძლიერებული φ_{out} პოტენციალი. ეს ინფორმაცია გამოიყენეთ ამოცანის ამოხსნისას.

მიზანი

ამოცანის მიზანია გამოვიყვანოთ განტოლება რომელიმე ცვლადისთვის, მაგალითად A წერტილის პოტენციალისთვის. ეს სიდიდე უნდა დავუკავშიროთ სხვა პოტენციალებთან და გამოვიყვანოთ A წერტილის პოტენციალის აღმწერი დიფერენციალური განტოლება. ამოცანის პირველ 3 პუნქტში ჩათვალეთ, რომ A წერტილის პოტენციალი φ_A დადებითია, ანუ დენი გავა მარტო ქვედა (D წერტილთან ახლოს) დიოდში, ზედა დიოდი არაფერს არ გაატარებს. ასევე, გაითვალისწინეთ, რომ O, A, B და D წერტილების პოტენციალები დაახლოებით ერთი რიგის უნდა იყოს. აგრეთვე ჩათვალეთ, რომ ოპერაციულ გამაძლიერებელში ეფექტურად დენი არ გადის.

გადახაზეთ A და B წერტილებს შორის მოცემული წრედის უბანი (პარალელურად მიერთებული ოპერაციული გამაძლიერებელი და კონდენსატორი მიმდევრობით მიერთებულ წინაღობასთან).

A.1	გამოიყენეთ ოპერაციული გამაძლიერებლის ზემოთ მოცემული თვისება და გამოიყვანეთ, რომ B წერტილის პოტენციალი A წერტილის პოტენციალთან კავშირდება შემდეგნაირად: $$\varphi_B = -(RC)\dot{\varphi}_A$$ თავზე წერტილი დროით წარმოებულია. რა მთავარი დაშვება გააკეთეთ ამ განტოლების მისაღებად? (ყველა შემდეგ პუნქტში დაგჭირდებათ ეს დაშვება).	**1.5 pt.**

ახლა გადახაზეთ წრედის BDO უბანი (პარალელურად მიერთებული ოპერაციული გამაძლიერებელი და კონდესატორი O და D წერტილებთან შეერთებული წინაღობების გავლით).

A.2	გამოსახეთ D წერტილის პოტენციალი შემდეგი სიდიდეებით: $\ddot{\varphi}_A$, φ_O, R, C. მინიშნება: გადახაზეთ წრედის BDO უბანი (პარალელურად მიერთებული ოპერაციული გამაძლიერებელი და კონდესატორი O და D წერტილებთან შეერთებული წინაღობების გავლით).	**2 pt.**

A.3	იმის გათვალისწინებით, რომ A წერტილის პოტენციალი დადებითია და დენი მარტო ქვედა დიოდში გადის, დააკავშირეთ D წერტილის პოტენციალი A-ს და B-ს პოტენციალებთან და საბოლოოდ ჩაწერეთ განტოლება φ_A-თვის. გამოიყენეთ φ_A, მისი პირველი და მეორე რიგის დროით წარმოებულები, φ_O, R და C.	**1.5 pt.**

ზედა პუნქტში მიღებული განტოლება სამართლიანია A წერტილის პოტენციალის დადებითი მნიშვნელობისთვის. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A წერტილის პოტენციალი უარყოფითია. ამ დროს, ქვედა დიოდის მაგივრად დენს მარტო ზედა დიოდი გაატარებს (ქვედა აღარ). ამ შემთხვევაშიც, B წერტილის პოტენციალი A-თი რაღათქმაუნდა იგივენაირად გამოისახება, მაგრამ სხვები აღარ.

A.4	გამოსახეთ D წერტილის პოტენციალი შემდეგი სიდიდეებით: φ_A, $\ddot{\varphi}_A$, φ_O, R, C როცა A წერტილში პოტენციალი უარყოფითია. მინიშნება: ამ შემთხვევაში დენი ქვედა დიოდიდან აღარ გადის, ახლა უკვე დენს შეუძლია გასვლა ზედა დიოდიდან.	**2 pt.**

A.5	დააკავშირეთ D (1.4-ში მიღებული) და B წერტილის პოტენციალები ერთმანეთთან და ჩაწერეთ განტოლება φ_A-თვის. გამოიყენეთ φ_A, მისი პირველი და მეორე რიგის დროითი წარმოებულები, φ_O, R და C.	**2 pt.**

მესამე და მეხუთე პუნქტებში უნდა მიგეღოთ განტოლებები შესაბამისად დადებითი და უარყოფითი φ_A-თვის.

A.6	გაართიანეთ ეს ორი განტოლება და ჩაწერეთ ერთი განტოლების სახით.	**1 pt.**