ამოცანა N1-ის ამოხსნა: მონეტის გორვა კონუსურ ზედაპირზე

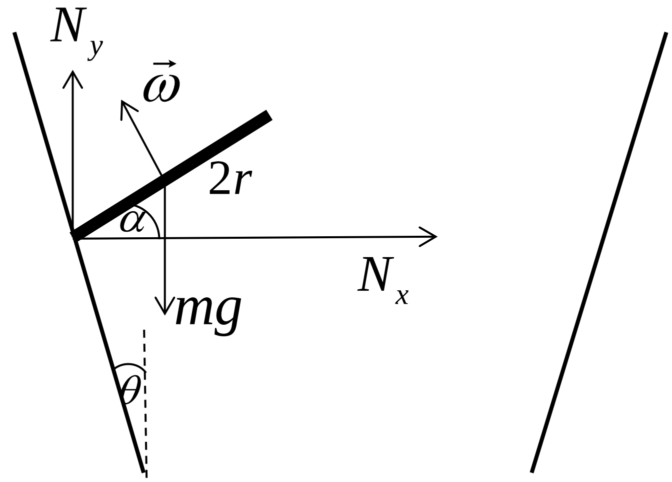
A.1 დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი:

$$N_x = m\Omega^2 R; \qquad N_y = mg$$

ხახუნი რადგან შეგვიძლია უგულებელვყოთ, ამიტომ რეაქციის ძალის მდგენელი ზედაპირზე ნულის ტოლი უნდა იყოს, ასე რომ:

$$N_y \cos\theta = N_x \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 \mathrm{R} = \mathrm{g}\cdot \mathrm{ctg}\theta$$

(0.5 ქულა).



მეორეს მხრივ, ძალის მომენტი უდრის იმპულსის მომენტის ცვლილებას, ასე რომ:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = N_y r\cos\alpha - N_x r\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\frac{mr^2}{2}\omega\Omega\sin\alpha = N_y r\cos\alpha - N_x r\sin\alpha$$

(1 ქულა).

რადგან $\omega r = \Omega R$, ზედა ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{3}{2}\Omega^2 \mathrm{R}\sin\alpha = g\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2g}{3\Omega^2 \mathrm{R}}$$

(1 ქულა).

A.2 აქედან კი ადვილად ჩანს, რომ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3} tg\theta$ **(0.5 ქულა).**

A.3 როგორც პირველი პუნქტიდან გავიგეთ, $\Omega^2 R/g = ctg\theta$, ესე იგი $\Omega^2 R/g$ მუდმივი სიდიდეა, საიდანაც ავტომატურად გამომდინარეობს გამოვარდნის სიჩქარე $\mathrm{v}_1^2/R_1 = \mathrm{v}_2^2/R_2$. **(0.5 ქულა)**

A.4 გადავწეროთ მომენტების ბალანსის განტოლება მონეტის გადახრამდე (კუთხე α) და გადახრის შემდეგ (კუთხე α') და ავიღოთ, რომ $\alpha' > \alpha$:

$$\frac{m}{2}\Omega^2 \mathrm{R}\sin\alpha = N_y\cos\alpha - N_x\sin\alpha$$
$$\frac{m}{2}\Omega^2 \mathrm{R}\sin\alpha' = N_y\cos\alpha' - N_x\sin\alpha' + P$$

(1.5 ქულა)

სადაც P მაკომპენსირებელი ძალის მომენტია, თუ ის დადებითია, მაშინ მონეტა პირვანდელ მდგომარეობას დაუბრუნდება და ესე იგი მოძრაობა მდგრადია. მართლაც, თუ პირველ განტოლებას $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$-ზე გავამრავლებთ და მეორე განტოლებას გამოვაკლებთ, მივიღებთ $N_y\left(ctg\alpha - ctg\alpha'\right) - P\sin\alpha = 0$ და იმის გათვალისწინებით, რომ $\alpha' > \alpha$ გამოვა, რომ $P > 0$. **(0.5 ქულა)**

A.5 დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი ცილინდრულ კოორდინატებში $\vec{R} = \left(z, R, \varphi\right)$. დავწეროთ ორტებით: $\vec{R} = z\vec{e}_z + R\vec{e}_R$ და შევნიშნოთ, რომ z კომპონენტი დროით ტრივიალურად წარმოვდება და გვაძლევს $\ddot{z}\vec{e}_z$ (ასოს ზემოთ წერტილი დროით გაწარმოებას ნიშნავს), ხოლო $R\vec{e}_R$ კომპონენტში საქმე უფრო რთულადაა, კერძოდ, დროის მეორე წარმოებული გვაძლევს:

$$\frac{d^2\left(R\vec{e}_R\right)}{dt^2}=\left(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_R+\left(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi \qquad \textbf{(1 ქულა)}$$

სადაც $\vec{e}_\varphi$ ერთეულოვანი ვექტორია $\vec{e}_R$ და $\vec{e}_z$ -ის პერპენდიკულარული. თუ ნიუტონის მეორე კანონს ამ $\vec{e}_\varphi$ -ის მიმართულებაზე დავაგეგმილებთ და გავითვალისწინებთ, რომ წინააღმდეგობის ძალის გარდა არაფერს არა აქვს ამ მიმართულებაზე გეგმილი და წინააღმდეგობის ძალა კი სიჩქარის პროპორციულია, ანუ $F=-\eta R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, მივიღებთ:

$$m\left(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi=-\eta R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \textbf{(1 ქულა)}$$

და თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Omega^2 R/g=\dot{\varphi}^2 R/g$ მუდმივი სიდიდეა და გავაწარმოებთ ამ უკანასკნელს დროით, მივიღებთ: $2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}R+\dot{\varphi}^2\dot{R}=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\varphi}\dot{R}}{2R}$ **(1.5 ქულა)**

და ამას თუ ჩავსვამთ წინა ფორმულაში, მივიღებთ: $\dfrac{3m}{2}\dot{R}=-\eta R$, რომელიც მარტივად იხსნება და გვაძლევს $R=R_1\exp\left(-2\eta t/3m\right)$ **(1 ქულა)**

ამოცანა N2-ის ამოხსნა: პარამეტრული რეზონანსი მაგნიტურ ქანქარაში

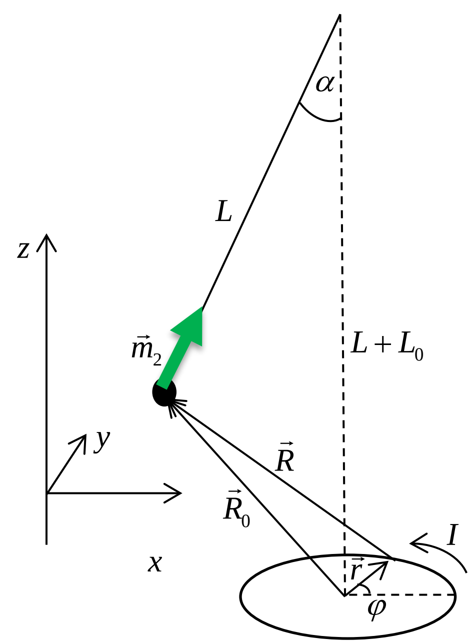
A.1 დავიწყოთ იმ მაგნიტური ველის მნიშვნელობების დათვლით, რომელსაც ქმნის წერტილოვანი წრიული დენი მისგან $\vec{R}$ რადიუს ვექტორის დაშორებით (იხილეთ ნახაზი).

განვმარტოთ:

$$\vec{R}=\vec{R}_0-\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_x&=R_{0x}-r_x=R_{0x}-r\cos\varphi \\ R_y&=-r_y=-r\sin\varphi \\ R_z&=R_{0z}\end{aligned}$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{\left(R_{0x}-r\cos\varphi\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2+R_{0z}^2}$$

(0.5 ქულა)



A.2 იმ დაშვებით, რომ წრიული დენის ზომები ძალიან მცირეა, შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიახლოება:

$$\frac{1}{R^3}\approx\frac{1}{R_0^3}+\frac{3}{R_0^5}R_{0x}r\cos\varphi \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

A.3 შევნიშნოთ, რომ ბიო-სავარის კანონში არსებული დენის მონაკვეთები გამოისახება როგორც

$$\delta l_x=-r\sin\varphi\cdot d\varphi; \qquad \delta l_y=r\cos\varphi\cdot d\varphi \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

A.4 ჩავწეროთ ბიო-სავარის კანონი $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}I\displaystyle\int\frac{\vec{\delta l}\times\vec{R}}{R^3}$ კომპონენტებით და გამოვიყენოთ ზემოთ ნაჩვენები ფორმულები და მიახლოებები:

$$B_x=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{\delta l_y R_z-\delta l_z R_y}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{\delta l_y R_z}{R^3}\approx\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R_0^3}+\frac{3}{R_0^5}R_{0x}r\cos\varphi\right)\cdot R_{0z}r\cos\varphi\cdot d\varphi=\frac{\mu_0}{4\pi}\pi r^2 I\,\frac{3R_{0z}R_{0x}}{R_0^5}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{3R_{0z}R_{0x}}{R_0^5}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\delta l_x R_y - \delta l_y R_x}{R^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R_0^3} + \frac{3}{R_0^5} R_{0x} r\cos\varphi \right) \cdot \left(r^2 \sin^2\varphi - r\cos\varphi \left[R_{0x} - r\cos\varphi \right] \right) \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2 \sin^2\varphi}{R_0^3} + \frac{r^2\cos^2\varphi}{R_0^3} - \frac{3}{R_0^5} R_{0x}^2 r^2 \cos^2\varphi \right) \cdot d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \left(\frac{2}{R_0^3} - \frac{3R_{0x}^2}{R_0^5} \right)$$

(1.5 ქულა)

B.1 გადავიდეთ ათვლის სისტემაში, რომლის ცენტრიც ქანქარის დაკიდების წერტილია, მაშინ:

$R_{0z} = L + L_0 - z;$ $\quad R_{0x} = x;$ $\quad R_0 = \sqrt{\left(L + L_0 - z\right)^2 + x^2};$ **(0.25 ქულა)**

B.2 აგრეთვე გვაქვს: $m_{2x} = m_{20} \dfrac{x}{L};$ $\quad m_{2z} = m_{20} \dfrac{z}{L}$ **(0.25 ქულა)**

B.3 გამოვიყენოთ მიახლოება, რომ გვაქვს პატარა გადახრები წონასწორობიდან:

$B_x \approx \dfrac{\mu_0}{4\pi} m_1 \dfrac{3x}{L_0^4};$ $\quad B_z \approx \dfrac{\mu_0}{4\pi} m_1 \left(\dfrac{2}{\left(L + L_0 - z\right)^3} - \dfrac{6x^2}{L_0^5} \right)$ **(1 ქულა)**

B.4 სოლენოიდის მიერ შექმნილი მაგნიტური ველის და მოქანავე $\vec{m}_2$ მაგნიტური დიპოლის ურთიერთქმედების ენერგია გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$U = -\vec{B}\vec{m}_2 = -B_x m_{2x} - B_z m_{2z} \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\frac{2z}{L\left(L + L_0 - z\right)^3} - \frac{6x^2 z}{LL_0^5} + \frac{3x^2}{LL_0^4} \right)$$ **(0.5 ქულა)**

ხოლო ძალა წარმოდგინდება როგორც ენერგიის გრადიენტი:

$F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\dfrac{12x}{L_0^5} - \dfrac{6x}{LL_0^4} \right);$ $\quad F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\dfrac{2}{LL_0^3} - \dfrac{6}{L_0^4} \right)$ **(0.5 ქულა)**

C.1 ქანქარის მოძრაობის პარალელურად ძალის გეგმილი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$F_{\parallel} \approx F_x + F_z \frac{x}{L} = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\frac{12}{L_0^5} - \frac{2}{L^2 L_0^3} \right) x = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_1 m_{20} \left(\frac{12}{L_0^5} - \frac{2}{L^2 L_0^3} \right) \alpha L; \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} = \left[-\frac{g}{L} - \frac{\mu_0}{4\pi M} m_1 m_{20} \left(\frac{12}{L_0^5} - \frac{2}{L^2 L_0^3} \right) \right] \alpha$$ **(1.5 ქულა)**

და რადგან სოლენოიდში დენი პერიოდულად იცვლება $m_1 = m_{10} \sin(\omega t)$, ზემოთა განტოლება ჩაიწერება როგორც $\ddot{\alpha} = \left[-\omega_0^2 + h\sin\left(2\omega t\right) \right] \alpha$, სადაც $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$ და $h = \dfrac{\mu_0}{4\pi M} m_{10} m_{20} \left(\dfrac{12}{L_0^5} - \dfrac{2}{L^2 L_0^3} \right)$ **(0.5 ქულა)**

C.2 ვეძებოთ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$\alpha = A(t)\sin\left(\omega t\right) + B(t)\cos(\omega t)$$

და ჩავსვათ რხევის განტოლებაში:

$$2\omega\left[\dot{A}\cos\left(\omega t\right) - \dot{B}\sin(\omega t) \right] + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left[A\sin\left(\omega t\right) + B\cos(\omega t) \right] = \frac{h}{2}\left[B\cos(\omega t) - A\cos(\omega t) \right]$$

აქედან მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$2\omega\dot{A} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) B = \frac{h}{2} B; \qquad -2\omega\dot{B} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A = -\frac{h}{2} A$$ **(0.5 ქულა)**

და ვეძებთ ამონახსნს შემდეგი სახით: $A = A_0 e^{st}$; $B = B_0 e^{st}$, სადაც A_0 და B_0 მუდმივებია, ხოლო s ნამდვილი დადებითი რიცხვი უნდა იყოს იმისთვის რომ მოხდეს რხევების ამპლიტუდების ექსპონენციალური ზრდა, ანუ რეზონანსი. ჩასმით ვიღებთ ორ წრფივ ალგებრულ განტოლებას

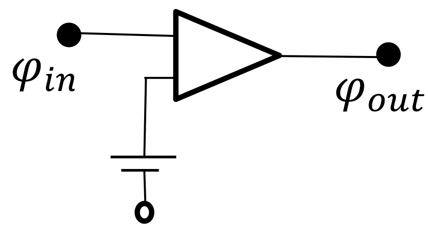
$$2\omega s A_0 + \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{h}{2}\right) B_0 = 0; \qquad -2\omega s B_0 + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{h}{2}\right) A_0 = 0$$ **(0.5 ქულა)**

რომლის ამოხსნადობის პირობიდან გვაქვს: $4\omega^2 s^2 A_0 = \left[\frac{h^2}{4} - \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2\right] > 0$ ესე იგი საბოლოოდ ვიღებთ, რომ

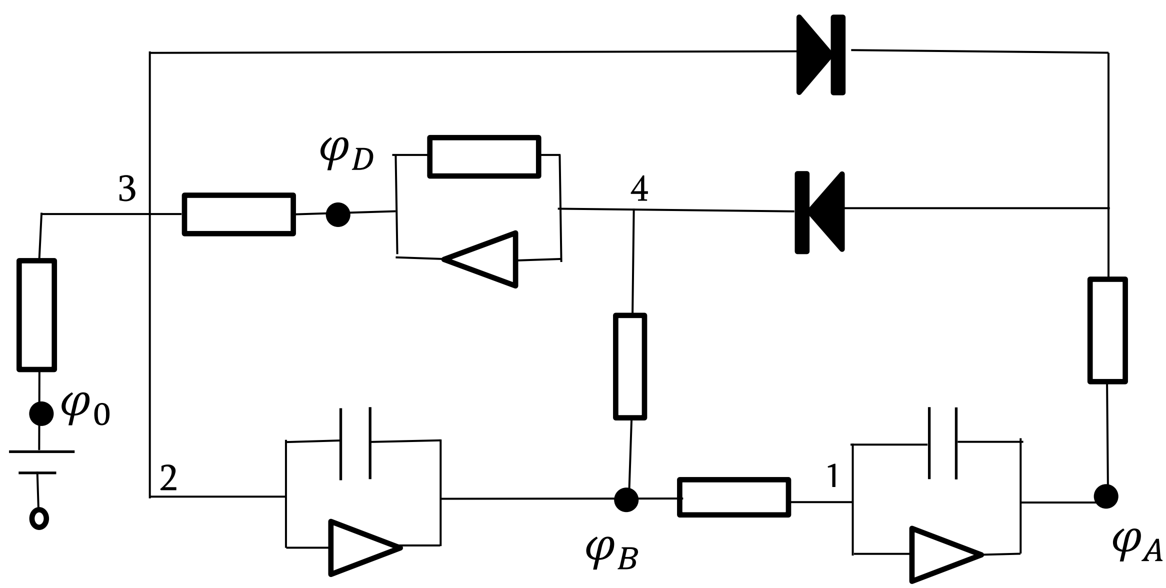
$$h > 2\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|$$ **(1.5 ქულა)**

ამოცანა N3-ის ამოხსნა: არაწრფივი დინამიკა ელექტრულ წრედში

A.1 დავხაზოთ ოპერაციული გამაძლიერებლის სქემა:



უნდა დავუშვათ, რომ პოტენციალი რეზისტორსა და კონდენსატორ-ოპერაციულ გამაძლიერებელს შორის 0-ია იმიტომ, რომ $\varphi_{out} = k \cdot \varphi_{in}$, სადაც k=100 000, და φ_{out} სხვა პოტენციალების რიგის უნდა გამოვიდეს. ამიტომ ამოცანის ყველა პუნქტისთვის, ვიღებთ, რომ ოპერაციული გამაძლიერებლის უკანა მხარეს პოტენციალი ნულის ტოლი უნდა იყოს. **(1 ქულა)**



ამ დაშვების გაკეთების შემდეგ, კონდენსატორზე (პოტენციალთა სხვაობა 1 და A წერტილს შორის) პოტენციალთა სხვაობაა: $-\varphi_A = \frac{q}{C}$, გავაწარმოოთ და მივიღებთ კონდენსატორზე დენს $I_C = -\dot{\varphi}_A \cdot C$.
(0.25 ქულა).

ვინაიდან ოპერაციულ გამაძლიერებელში დენი არ გადის, ამ დენს გავუტოლებთ წინაღობაში გასულ დენს: $I_R = \frac{\varphi_B}{R}$. და მივიღებთ B და A წერტილების პოტენციალების დამაკავშირებელ განტოლებას:

$$\varphi_B = -(RC)\dot{\varphi}_A$$ **(0.25 ქულა)**

A.2 ამ პუნქტშიც ოპერაციული გამაძლიერებლის მარცხენა მხარეს პოტენციალი ნულის ტოლად უნდა ჩავთვალოთ. კონდენსატორში გამავალი დენი იქნება, წინა პუნქტის მსგავსად: $I_C = -\dot{\varphi}_B \cdot C$, ჩავსვამთ წინა პუნქტიდან მიღებულ φ_B-ს გამოსახულებას φ_A-თი, მივიღებთ: $I_C = \ddot{\varphi}_A \cdot R \cdot C^2$ **(0.25 ქულა).**
ვინაიდან ამ შემთხვევაში ზედა დიოდი დენს არ ატარებს, I_C დენი ტოლი იქნება ორ რეზისტორში (O და D წერტილებთან მდებარე) გამავალი დენების ჯამის. $I_C = I_R(O) + I_R(D)$. **(0.5 ქულა).**
რადგან პოტენციალი ოპერაციული გამაძლიერებლის მარცხნივ ნულია, $I_R(O)$ და $I_R(D)$ შესაბამისად ტოლი იქნება $I_R(O) = \frac{\varphi_O}{R}$ და $I_R(D) = \frac{\varphi_C}{R}$ **(0.25 ქულა).**
ჩავსვამთ ზემოთ მოცემულ კირხოფის კანონში და მივიღებთ, რომ:

$$\varphi_D = (RC)^2\ddot{\varphi}_A - \varphi_O$$ **(1 ქულა).**

A.3 ამ პუნქტშიც ოპერაციული გამაძლიერებლის მარჯვენა (მარცხენა იმიტომ არა, რომ ამ ადგილას პირიქითაა შეერთებული სქემაში ოპერაციული გამაძლიერებელი) მხარეს პოტენციალი ნულის ტოლად უნდა ჩავთვალოთ. ამ ქვედა დიოდში დენი უპრობლემოდ გადის (ამ შემთხვევისთვის). ე.ი. პირდაპირ დავწერთ, რომ $-\frac{\varphi_C}{R} = \frac{\varphi_B}{R} + \frac{\varphi_A}{R}$ **(1 ქულა).**
ჩავსვამთ φ_A-თი გამოსახულ φ_C და φ_B-ს მნიშვნელობებს და მივიღებთ:

$$(RC)^2\ddot{\varphi}_A - (RC)\dot{\varphi}_A + \varphi_A - \varphi_O = 0$$ **(0.5 ქულა).**

A.4 ამ პუნქტს ვხსნით A.2-ის მსგავსად, ოღონდ ზედა დიოდის გავლით D წერტილის პოტენციალთან დაკავშირდება A წერტილის პოტენციალის გამოყენებით. კონდენსატორში გამავალი დენი იქნება (A.2 პუნქტშიც წერია): $I_C = -\dot{\varphi}_B \cdot C = \ddot{\varphi}_A \cdot R \cdot C^2$ **(0.25 ქულა).**
ვინაიდან ამ შემთხვევაში ზედა დიოდი დენს ატარებს, I_C დენი ტოლი იქნება სამ რეზისტორში (O, D და A წერტილებთან მდებარე) გამავალი დენების ჯამის: $I_C = I_R(O) + I_R(D) + I_R(A)$ **(0.5 ქულა).**
ზემოთა ფორმულაში $I_R(O)$, $I_R(D)$ და $I_R(A)$ შესაბამისად ტოლი იქნება (პოტენციალი ოპერაციული გამაძლიერებლის მარცხნივ ნულია): $I_R(O) = \frac{\varphi_O}{R}$, $I_R(D) = \frac{\varphi_C}{R}$ და $I_R(A) = \frac{\varphi_A}{R}$ **(1 ქულა).**
ჩავსვამთ ზემოთ მოცემულ კირხოფის კანონში და მივიღებთ, რომ:

$$\varphi_D = (RC)^2\ddot{\varphi}_A - \varphi_A - \varphi_O$$ **(0.25 ქულა).**

A.5 ამ პუნქტს ვხსნით A.3-ის მსგავსად, ოღონდ C წერტილის პოტენციალი A-სთან უკვე წინა პუნქტით დაკავშირდა, ახლა ამ შემთხვევაში ქვედა დიოდი დენს აღარ გაატარებს. ამიტომაც, D წერტილის პოტენციალი დაკავშირდება მარტო B წერტილის პოტენციალთან. დავწერთ: $-\frac{\varphi_D}{R} = \frac{\varphi_B}{R}$ **(1 ქულა).** .
ჩავსვამთ φ_A-თი გამოსახულ φ_D და φ_B-ს მნიშვნელობებს და მივიღებთ:

$$(RC)^2\ddot{\varphi}_A - (RC)\dot{\varphi}_A - \varphi_A - \varphi_O = 0$$ **(1 ქულა).**

A.6 რომ შევხედოთ A.3-ში (φ_A-ს დადებითი მნიშვნელობისთვის) და A.5-ში (φ_A-ს უარყოფითი მნიშვნელობისთვის) მიღებულ საბოლოო განტოლებებს, მარტივი მისახვედრია, რომ:

$$(RC)^2\ddot{\varphi}_A - (RC)\dot{\varphi}_A + |\varphi_A| - \varphi_O = 0$$ **(1 ქულა).**