I ტური

ამოცანა 1. ვთქვათ Q_+ აღნიშნავს ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. იპოვეთ ყველა $f: Q_+ \to Q_+$ სახის ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$f\left(x^2\left(f(y)\right)^2\right)=\left(f(x)\right)^2 f(y)$$

ყოველი $x, y \in Q_+$ რიცხვებისთვის.

ამოხსნა

ვთქვათ $f(1)=k$. პირობის თანახმად $k \neq 0$. ჩავსვათ განტოლებაში $x=\frac{1}{k}$ და $y=1$.

მივიღებთ $f\left(\frac{1}{k^2}\cdot k^2\right)=\left(f\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2\cdot k$, საიდანაც $f\left(\frac{1}{k}\right)=1$. ჩავსვათ განტოლებაში $y=\frac{1}{k}$.

მივიღებთ $f\left(x^2\right)=\left(f(x)\right)^2$. ჩავსვათ $x=1$, მივიღებთ $f(1)=1$.

ჩავსვათ განტოლებაში $x=f(a)$, $y=b$ და $x=f(b)$, $y=a$. მივიღებთ

$(f(f(a)))^2 f(b)=f(f^2(a)f^2(b))=(f(f(b)))^2 f(a)$, საიდანაც $\dfrac{(f(f(a)))^2}{f(a)}=\dfrac{(f(f(b)))^2}{f(b)}$

ყოველი $a, b \in Q_+$. ჩავსვათ $b=1$. მივიღებთ $\dfrac{(f(f(a)))^2}{f(a)}=1$, საიდანაც $(f(f(a)))^2=f(a)$.

აქედან კი $f(a)=(f(f(a)))^2=(f(f(f(a))))^4=\ldots=(f(\underset{n}{f\ldots}(f(a))))^{2^{n-1}}$. ვინაიდან $f(a)$ რაციონალური რიცხვია და ის შეიძლება წარმოდგინდეს რაციონალური რიცხვის რაგინდ დიდი ხარისხით, ამიტომ აუცილებლად $f(a)=1$ ყოველი $a \in Q_+$.

პასუხი: $f(x)=1$ ყოველი $x \in Q_+$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $f\left(\dfrac{1}{f(1)}\right)=1$;

ბ) დაადგინა, რომ $f(1)=1$;

გ) ჩასვა $x=f(a)$, $y=b$ და $x=f(b)$, $y=a$;

დ) დაადგინა, რომ $\dfrac{(f(f(a)))^2}{f(a)}=\dfrac{(f(f(b)))^2}{f(b)}$;

ე) დაადგინა, რომ $(f(f(a)))^2=f(a)$;

ვ) დაადგინა, რომ $f(a)=(f(f(a)))^2=(f(f(f(a))))^4=\ldots=(f(\underbrace{f\ldots}_{n}(f(a))))^{2^{n-1}}$;

ზ) მიიღო სწორი პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ბ)
3ქ- ბ), გ)
4ქ- ბ), გ), დ)
5ქ- ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა მთელი რიცხვი $n \geq 3$, რომლისთვისაც არსებობს მთელი დადებითი რიცხვებისგან შემდგარი $2n$ ელემენტიანი სიმრავლე S, შემდეგი თვისებით: ყოველი m-თვის, $m = 2,3,\dots,n$, არსებობს S სიმრავლის m ელემენტიანი ქვესიმრავლე A_m ისეთი, რომ

$$\sum_{s\in A_m} s = \sum_{s\in S\setminus A_m} s \quad .$$

შენიშვნა: $\sum_{s\in A} s$ *აღნიშნავს* A *სიმრვალის ყველა ელემენტის ჯამს;* $A\setminus B$ *არის* A *სიმრვლის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც არ ეკუთვნიან* B*-ს.*

ამოხსნა

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი მთელი $n \geq 3$-თვის სიმრავლე

$$S = \left\{1\cdot 3^k, 2\cdot 3^k : k = 1,2,\dots,n-1\right\} \cup \left\{1, \frac{3^n+9}{2} - 1\right\}$$

აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. მართლაც, ვინაიდან

$$\sum_{s\in S} s = 1 + \frac{3^n+9}{2} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1\cdot 3^k + 2\cdot 3^k\right) = 2\cdot 3^n$$

ამიტომ A_m სიმრავლის საპოვნელად საკმარისია ვიპოვოთ S-ის ისეთი m ელემენტიანი ქვესიმრავლე, რომელთა ელემენტების ჯამი 3^n-ია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$A_m = \{2\cdot 3^k : k = n-m+1, n-m+2, \dots, n-1\} \cup \{1\cdot 3^{n-m+1}\}.$$

პასუხი : ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს ყოველი მთელი რიცხვი $n \geq 3$.

კომენტარი: მოვიყვანოთ S სიმრავლის აგების კონსტრუქცია. ვთქვათ $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთან $s_{2i+1} = s_{2i} + s_{2i-1}$ ყოველი $i = 2,3,\cdots,n-1$ და $s_{2n} = s_1 + s_2 + \cdots + s_{2n-4}$. თუ s_{2n} განსხვავებულია ყველა სხვა წევრისგან, მაშინ სიმრვალე $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_{2n}\}$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. მართლაც

$$\sum_{s\in S} s = \sum_{i=1}^{2n-4} s_i + (s_{2n-3} + s_{2n-2}) + s_{2n-1} + s_{2n} = 2\cdot s_{2n} + 2\cdot s_{2n-1}$$

და ვინაიდან $\frac{1}{2}\sum_{s\in S} s = s_{2n} + s_{2n-1} = s_{2n} + s_{2n-2} + s_{2n-3} = s_{2n} + s_{2n-2} + s_{2n-4} + s_{2n-5} = \cdots$

ამიტომ ცხადია, რომ A_m-ის როლში შეგვიძლია ავიღოთ

$$A_m = \{s_{2n}, s_{2n-2}, s_{2n-4}, \dots, s_{2n-2m+4}, s_{2n-2m+3}\}.$$

ამრიგად, გვრჩება, რომ შევარჩიოთ s_{2n} ისე, რომ ის არ ეკუთვნოდეს $\{s_1, s_2, \cdots, s_{2n-1}\}$ სიმრავლეს. ამის გაკეთება შეგვიძლია მრავალი გზით, მაგალითად ჯერ $\{s_2, \cdots, s_{2n-1}\}$ სიმრავლის დასახელებით, და ბოლოს s_1 -ის შერჩევით.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო პასუხი მკაცრი დასაბუთების გარეშე;

ბ) დაიწყო S სიმრავლის აგება, განიხილა რა ისეთი $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$ რიცხვები, რომ $s_{2i+1} = s_{2i} + s_{2i-1}$ ყოველი $i = 2,3, \cdots, n-1$;

გ) შენიშნა, რომ თუ $s_{2n} = s_1 + s_2 + \cdots + s_{2n-4}$, მაშინ $\sum_{s \in S} s = 2 \cdot s_{2n} + 2 \cdot s_{2n-1}$;

დ) შენიშნა ტოლობები $s_{2n} + s_{2n-1} = s_{2n} + s_{2n-2} + s_{2n-3} = s_{2n} + s_{2n-2} + s_{2n-4} + s_{2n-5} = \cdots$;
ე) დაასკვნა, რომ თუ $s_{2n} \notin \{s_1, s_2, \cdots, s_{2n-1}\}$ მაშინ S-ის აგება დასრულებულია ;

ვ) აღნიშნა ერთი მაინც მეთოდი s_{2n}-ის შერჩევისა ისე, რომ $s_{2n} \notin \{s_1, s_2, \cdots, s_{2n-1}\}$;

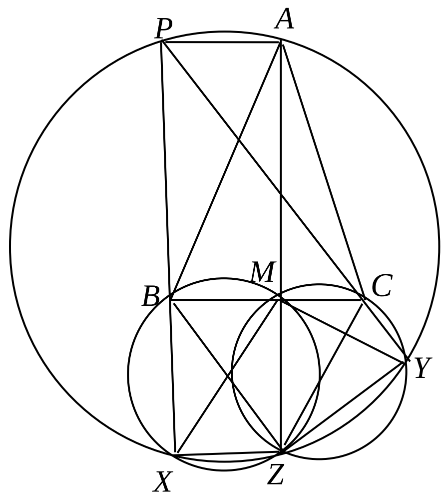
ზ) მოიყვანა მაგალითი $2n$ ელემენტიანი სიმრვალისა, რომელიც ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ბ)
3ქ- ბ), გ)
4ქ- ბ), გ), დ)
5ქ- ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ) ან ზ)

ამოცანა 3. ABC სამკუთხედის შიგნით აღებულია T წერტილი. A_1, B_1 და C_1 წერტილები არიან T წერტილის ღერძულად სიმეტრიული წერტილები შესაბამისად BC, CA და AB ღერძების მიმართ. ვთქვათ Ω არის $A_1B_1C_1$ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. A_1T, B_1T და C_1T წრფეები Ω წრეწირს მეორედ კვეთენ შესაბამისად A_2, B_2 და C_2 წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AA_2, BB_2 და CC_2 წრფეები იკვეთებიან ერთ წერტილში და მათი გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს Ω წრეწირზე.

ამოხსნა



გვაქვს $\angle PAM = \angle AMC = 90^\circ$. ვთქვათ Z არის AM წრფისა და Y წერტილზე PC წრფისადმი გავლებული მართობის გადაკვეთის წერტილი. მაშინ P, A, Y, Z წერტილები იქნება ერთ წრეწირზე.

ვინაიდან $\angle CMZ = \angle CYZ = 90^\circ$, ამიტომ $CYZM$ ოთხკუთხედი არის ციკლური, საიდანაც $\angle CZM = \angle CYM$. პირობის თანახმად $\angle CYM = \angle BXM$, ამასთან $\angle CZM = \angle BZM$. მაშასადამე $\angle BXM = \angle BZM$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ B, X, Z, M წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. მაშინ $\angle BXZ = 180^\circ - \angle BMZ = 90^\circ$. ამრიგად $\angle PXZ = \angle PYZ = \angle PAZ = 90^\circ$, რაც გვაძლევს, რომ P, A, X, Y, Z წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს. ამრიგად $APXY$ ოთხკუთხედი ციკლურია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შეოიღო Z როგორც AM წრფისა და Y წერტილზე PC წრფისადმი გავლებული მართობის გადაკვეთის წერტილი;

ბ) დაადგინა, რომ P, A, Y, Z წერტილები იქნება ერთ წრეწირზე;

გ) დაადგინა, რომ $CYZM$ ოთხკუთხედი არის ციკლური;

დ) დაადგინა, რომ $\angle BXM = \angle BZM$;

ე) დაადგინა, რომ B, X, Z, M წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს

ვ) დაადგინა, რომ $\angle PXZ = \angle PYZ = \angle PAZ = 90^{\circ}$;

ზ) დაადგინა, რომ P, A, X, Y, Z წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობს, საიდანაც მიიღება, რომ $APXY$ ოთხკუთხედი ციკლურია.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

II ტური

ამოცანა 4. განსაზღვრეთ ყველა (n,k) წყვილი, სადაც n და k ერთმანეთისაგან განსხვავებული მთელი დადებითი რიცხვებია ისეთი, რომ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი s რომლისთვისაც sn და sk რიცხვების გამყოფების რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია.

ამოხსნა

ვთქვათ $d(m)$ აღნიშნავს მთელი დადებითი m-ის გამყოფთა რაოდენობას. ამრიგად თუ $m=\prod_i p_i^{\alpha_i}$ წარმოადგენს m-ის მარტივ მამრავლებად დაშლას მაშინ $d(m)=\prod_i(\alpha_i+1)$. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ თუ $k|n$ ან $n|k$ და $(n\neq k)$ მაშინ ასეთი s არ არსებობს. ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $n|k$. ცხადია, რომ ყოველი მთელი დადებითი s რიცხვისთვის sn-ის გამყოფთა სიმრავლე არის საკუთრივი ქვესიმრავლე sk რიცხვის გამყოფთა სიმრავლის, ე.ი. $d(sn)<d(sk)$. ამრიგად sn და sk რიცხვების გამყოფთა რაოდენობა ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $k\nmid n$ და $n\nmid k$ მაშინ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი s, რომელიც ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს. ვთქვათ $p_1,p_2,\cdots,p_t$ მარტივი რიცხვები წარმოადგენენ nk რიცხვის ყველა მარტივ გამყოფს. წარმოვადგინოთ n და k მარტივ მამრავლებად

$n=\prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$ და $k=\prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$. ვთქვათ $s=\prod_{i=1}^t p_i^{\gamma_i}$. ამრიგად ჩვენი ამოცანაა შევარჩიოთ γ_i ხარისხის მაჩვენებლები ისე, რომ ისინი იყვნენ არაუარყოფითი რიცხვები და ამასთან

$$\frac{d(sn)}{d(sk)}=\prod_{i=1}^t\frac{\alpha_i+\gamma_i+1}{\beta_i+\gamma_i+1}=1. \qquad (1)$$

ცხადია, რომ თუ $\alpha_i=\beta_i$ რომელიღაც i-თვის, მაშინ მიუხედავად γ_i-ის მნიშვნელობისა, შესაბამისი მამრავლი (1)-ში, იქნება ერთის ტოლი. ამრიგად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი i ინდექსისთვის $\alpha_i\neq\beta_i$.

ლემა. ვთქვათ $\alpha>\beta$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. მაშინ ყოველი მთელი $M\geq\beta+1$-თვის, არსებობს არაუარყოფითი მთელი რიცხვი γ ისეთი, რომ

$$\frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1}=1+\frac{1}{M}=\frac{M+1}{M}.$$

დამტკიცება: გვაქვს,

$$\frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1}=1+\frac{1}{M}\Leftrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma+1}=\frac{1}{M}\Leftrightarrow\gamma=M(\alpha-\beta)-(\beta+1)\geq 0.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ინდექსი u ისეთი, რომ $\alpha_i > \beta_i$ როცა $i = 1, \dots, u$ და $\alpha_i < \beta_i$ როცა $i = u+1, \dots, t$. რადგანაც $k \nmid n$ და $n \nmid k$ ამიტომ $1 \leq u \leq t-1$.

ახლა განვიხილოთ მთელი რიცხვი X რომელიც მეტია ყველა α_i-ზე და β_i-ზე. ლემის გამო, შეგვიძლია ავიღოთ γ_i რიცხვები ისე, რომ სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები

$\frac{\alpha_i+\gamma_i+1}{\beta_i+\gamma_i+1} = \frac{uX+i}{uX+i-1}$ როცა $i = 1, \cdots, u$ და $\frac{\beta_{u+i}+\gamma_{u+i}+1}{\alpha_{u+i}+\gamma_{u+i}+1} = \frac{(t-u)X+i}{(t-u)X+i-1}$ როცა $i = 1, \cdots, t-u$. ამის გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{d(sn)}{d(sk)} = \prod_{i=1}^{u} \frac{uX+i}{uX+i-1} \cdot \prod_{i=1}^{t-u} \frac{(t-u)X+i-1}{(t-u)X+i} = \frac{u(X+1)}{uX} \cdot \frac{(t-u)X}{(t-u)(X+1)} = 1.$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

პასუხი: ყველა წყვილი (n, k) ისეთი, რომ $k \nmid n$ და $n \nmid k$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აჩვენა, რომ თუ $k|n$ ან $n|k$ და $(n \neq k)$ მაშინ ასეთი s არ არსებობს;

ბ) მიიღო (1) ტოლობა;

გ) აჩვენა, რომ თუ $\alpha > \beta$, მაშინ საკმაოდ დიდი M -თვის არსებობს არაუარყოფითი γ ისეთი, რომ $\frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1} = \frac{M+1}{M}$;

დ) განიხილა ისეთი ინდექსი u, რომ $\alpha_i > \beta_i$ როცა $i = 1, \dots, u$ და $\alpha_i < \beta_i$ როცა $i = u+1, \dots, t$;

ე) ლემის ანუ გ) პუნქტის გამოყენებით მიიღო, რომ საკმაოდ დიდი X -თვის $\frac{\alpha_i+\gamma_i+1}{\beta_i+\gamma_i+1} = \frac{uX+i}{uX+i-1}$ როცა $i = 1, \cdots, u$;

ვ) მიიღო, რომ $\frac{\beta_{u+i}+\gamma_{u+i}+1}{\alpha_{u+i}+\gamma_{u+i}+1} = \frac{(t-u)X+i}{(t-u)X+i-1}$, როცა $i = 1, \cdots, t-u$;

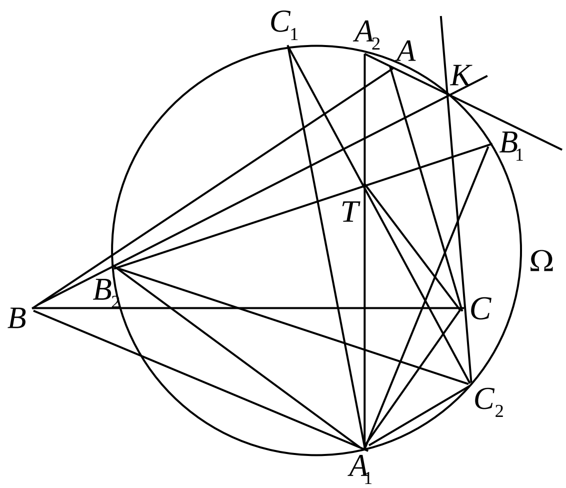
ზ) ზემოთ მოყვანილი ორი პუნქტის გამოყენებით აჩვენა, რომ $\frac{d(sn)}{d(sk)} = 1$ და მიიღო პასუხი;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 5. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $AB = AC$. ვთქვათ M არის BC მონაკვეთის შუაწერტილი. ვთქვათ P არის ისეთი წერტილი, რომ $PB < PC$ და PA პარალელურია BC მონაკვეთის. ვთქვათ X და Y არიან წერტილები შესაბამისად PB და PC წრფეებზე ისე, რომ B მდებარეობს PX მონაკვეთზე, C მდებარეობს PY მონაკვეთზე და $\angle PXM = \angle PYM$. დაამტკიცეთ, რომ $APXY$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

ამოხსნა



ვთქვათ, CC_2 კვეთს Ω წრეწირს K წერტილში. ვაჩვენოთ, რომ BB_2 წრფე გადის K წერტილზე. ანალოგიურად იქნება ნაჩვენები, რომ AA_2 წრფეც გაივლის K წერტილზე. ამისთვის კი საკმარისია, რომ ვაჩვენოთ: $\angle BB_2A_1 = \angle CC_2A_1$.ვინაიდან CB და CA არიან TA_1 და TB_1 მონაკვეთების შუამართობები, ამიტომ C იქნება TA_1B_1 სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. მაშინ $\angle BCA_1 = \angle BCT = \angle TB_1A_1 = \angle A_1B_1B_2 = \angle A_1C_2B_2$. ანალოგიურად ვიღებთ $\angle A_1BC = \angle A_1C_1C_2 = \angle A_1B_2C_2$. ამრიგად A_1BC და $A_1B_2C_2$ სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ $\dfrac{A_1B_2}{A_1B} = \dfrac{A_1C_2}{A_1C}$ და $\angle BA_1C = \angle B_2A_1C_2$. უკანასკნელი ტოლობიდან მიიღება, რომ $\angle BA_1B_2 = \angle CA_1C_2$, ამიტომ A_1BB_2 და A_1CC_2 სამკუთხედები ასევე მსგავსია, საიდანაც მიიღება, რომ $\angle BB_2A_1 = \angle CC_2A_1$ რ.დ.გ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ C იქნება TA_1B_1 სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle BCA_1 = \angle A_1C_2B_2$;

გ) დაადგინა, რომ $\angle A_1BC = \angle A_1B_2C_2$;

დ) დაადგინა, რომ A_1BC და $A_1B_2C_2$ სამკუთხედები მსგავსია;

ე) დაადგინა, რომ $\angle BA_1B_2 = \angle CA_1C_2$;

ვ) დაადგინა, რომ A_1BB_2 და A_1CC_2 სამკუთხედები მსგავსია;

ზ) დაადგინა, რომ $\angle BB_2A_1 = \angle CC_2A_1$ და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ) ან ა), გ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. ვთქვათ n მთელი დადებითი რიცხვია. მოცემულია დაფა, რომელიც შედგება ერთ მწკრივში განლაგებული $n+1$ ცალი უჯრისგან. უჯრები გადანომრილია მარცხნიდან მარჯვნივ რიცხვებით $0,1,\dots,n$. დასაწყისში n ცალი ქვა მოთავსებულია უჯრაზე ნომრით 0, ხოლო დანარჩენი უჯრები ცარიელია. ყოველ სვლაზე, გუგა ირჩევს ნებისმიერ არაცარიელ უჯრას, რომელიც შეიცავს ვთქვათ k ქვას, იღებს ერთ-ერთ ქვას ამ k ცალი ქვიდან და გადააქვს ეს ქვა მარჯვნივ არაუმეტეს k უჯრისა. გუგას მიზანია ყველა ქვა გადაიტანოს უჯრაზე ნომრით n.

დაამტკიცეთ, რომ გუგა ვერ მიაღწევს მიზანს $\left\lceil\frac{n}{1}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+\cdots+\left\lceil\frac{n}{n}\right\rceil$ სვლაზე ნაკლები სვლით. ($\lceil x\rceil$ აღნიშნავს უმცირეს მთელ რიცხვს, რომელიც არანაკლებია x-ზე).

ამოხსნა

გადავნომროთ ქვები რიცხვებით $1,2,\dots,n$. დავუშვათ, რომ ყოველ სვლაზე, გუგა ამორჩეული უჯრიდან იღებს ქვას მაქსიმალური ნომრით და ის ქვა გადააქვს მარჯვნივ წესების შესაბამისად. ვინაიდან ქვები ერთმანეთისაგან განურჩევლებია, აქვთ საერთო სათავე და საერთო საბოლოო მდებარეობა, ამიტომ ზემოთ მოყვანილი დაშვება გუგას ნებისმიერი სტრატეგიისთვის არავითარ შეზღუდვას არ წარმოადგენს.

ამრიგად, როდესაც ქვა ნომრით k გადადის რაიმე უჯრიდან, ეს უჯრა შეიცავს არაუმეტეს k ქვას (ვინაიდან ამ უჯრაზე მყოფი ყველა ქვის ნომერი ნაკლებია k-ზე). ეს ნიშნავს, რომ ქვა ნომრით k, ყოველ სვლაზე გადადის მარჯვნივ არაუმეტეს k უჯრისა. ვინაიდან ყოველი ქვა მთლიანობაში გადადის n უჯრით მარჯვნივ, ამიტომ ყოველი k-თვის, ქვამ ნომრით k უნდა გააკეთოს სულ მცირე $\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil$ სვლა ანუ ჯამში უნდა გაკეთდეს სულ მცირე $\left\lceil\frac{n}{1}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil+\cdots+\left\lceil\frac{n}{n}\right\rceil$ სვლა. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ ყოველ სვლაზე ქვების განურჩევადობის გამო არა აქვს მნიშვნელობა თუ რომელ ქვას გადავიტანთ მარჯვნივ;

ბ) გადანომრა ქვები რიცხვებით $1,2,\dots,n$ და ყოველ არაცარიელ უჯრაში განიხილა ქვა მაქსიმალური ინდექსით;

გ) შემოიღო წესი, რომლის მიხედვითაც გუგა სვლას აკეთებს იმ ქვით, რომლის ნომერიც მაქსიმალურია შესაბამის უჯრაში მდებარე ქვების ნომრებს შორის;

დ) შენიშნა, რომ როცა ქვა ნომრით k გადადის რაიმე უჯრიდან, ეს უჯრა შეიცავს არაუმეტეს k ქვას;

ე) დაასკვნა, რომ ქვა ნომრით k, ყოველ სვლაზე გადადის მარჯვნივ არაუმეტეს k უჯრისა.;

ვ) შენიშნა, რომ ყოველი k-თვის, ქვამ ნომრით k უნდა გააკეთოს სულ მცირე $\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil$ სვლა ;

ზ) თითოეული $k-$ თვის მიღებული შეფასება აჯამა k-თი და მიიღო სასურველი შეფასება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)